

**Miejsce  
na naklejkę**

**MMA-R1\_1P-082**

**EGZAMIN MATURALNY  
Z MATEMATYKI  
POZIOM ROZSZERZONY**

**MAJ  
ROK 2008**

**Czas pracy 180 minut**

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj rozumowanie prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

**Wypełnia zdający  
przed rozpoczęciem pracy**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

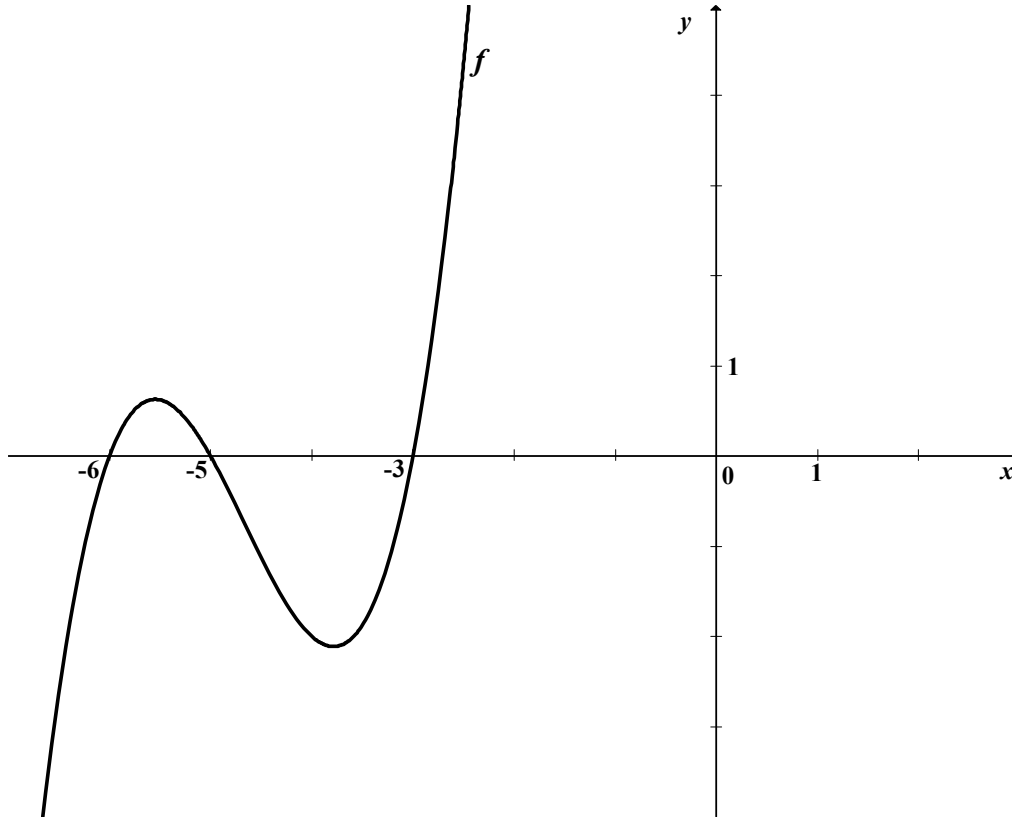
**PESEL ZDAJĄCEGO**

--	--	--	--

**KOD  
ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1. (4 pkt)**

Wielomian  $f$ , którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek  $f(0) = 90$ . Wielomian  $g$  dany jest wzorem  $g(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$ . Wykaż, że  $g(x) = -f(-x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .



Z rysunku odczytuję miejsca zerowe funkcji  $f$  i zapisuję jej wzór w postaci iloczynowej  $f(x) = a(x+6)(x+5)(x+3)$ .

Funkcja spełnia warunek  $f(0) = 90$ , czyli  $a(0+6)(0+5)(0+3) = 90$ .

Obliczam współczynnik  $a$ :  $a = 1$  i zapisuję wzór funkcji  $f$ :

$$f(x) = (x+6)(x+5)(x+3).$$

Wzór funkcji  $f$  zapisuję w postaci:  $f(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$ .

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\left[(-x)^3 + 14(-x)^2 + 63(-x) + 90\right] = \\ &= -\left[-x^3 + 14x^2 - 63x + 90\right] = \\ &= x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = g(x) \end{aligned}$$

Zatem  $-f(-x) = g(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 2. (4 pkt)**

Rozwiąż nierówność  $|x-2|+|3x-6|<|x|$ .

$|3x-6|=3\cdot|x-2|$ , więc nierówność przyjmuje postać:  $4|x-2|<|x|$ .

Rozwiązanie nierówności:

$$\begin{cases} -4(x-2) < -x & \text{gdy } x \in (-\infty, 0) \\ -4(x-2) < x & \text{gdy } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 4(x-2) < x & \text{gdy } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{8}{3} & \text{gdy } x \in (-\infty, 0) \\ x > \frac{8}{5} & \text{gdy } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x < \frac{8}{3} & \text{gdy } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

W przedziale  $(-\infty, 0)$  nierówność nie ma rozwiązania.

Rozwiązaniem nierówności w przedziale  $\langle 0, 2 \rangle$  są liczby rzeczywiste należące do przedziału  $\left(\frac{8}{5}, 2\right)$ , natomiast rozwiązaniem nierówności w przedziale  $\langle 2, \infty \rangle$  są

liczby rzeczywiste należące do przedziału  $\left\langle 2, \frac{8}{3} \right\rangle$ .

Rozwiązaniem nierówności  $|x-2|+|3x-6|<|x|$ , jest więc przedział  $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{3}\right)$ .

**Zadanie 3. (5 pkt)**

Liczby  $x_1 = 5 + \sqrt{23}$  i  $x_2 = 5 - \sqrt{23}$  są rozwiązaniami równania  $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$  z niewiadomą  $x$ . Oblicz wartości  $p$  i  $q$ .

Zapisuję równanie kwadratowe w postaci iloczynowej:

$$(x - 5 - \sqrt{23}) \cdot (x - 5 + \sqrt{23}) = 0$$

przekształcam je do postaci ogólnej

$$(x - 5)^2 - 23 = 0$$

$$x^2 - 10x + 2 = 0$$

Porównuję odpowiednie współczynniki obu postaci równania i stwierdzam, że muszą być spełnione równocześnie dwa warunki:  $p^2 + q^2 = 10$  i  $p + q = 2$ .

Rozwiązuję układ równań 
$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 10 \\ p + q = 2 \end{cases}$$

Dokonuję podstawienia:  $q = 2 - p$  i otrzymuję równanie kwadratowe z jedną niewiadomą:

$$p^2 - 2p - 3 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania kwadratowego są liczby:  $p_1 = 3$  lub  $p_2 = -1$ .

Obliczam wartości  $q$  w zależności od  $p$ :

Dla  $p_1 = 3$ ,  $q_1 = -1$ , natomiast dla  $p_2 = -1$ ,  $q_2 = 3$ .

**Zadanie 4. (4 pkt)**

Rozwiąż równanie  $4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

*Przekształcam równanie:*  $4(1 - \sin^2 x) = 4 \sin x + 1$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

*Wprowadzam pomocniczą niewiadomą  $\sin x = t$  i  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ , i zapisuję równanie*

$$4t^2 + 4t - 3 = 0.$$

*Rozwiązaniem tego równania są liczby:*  $t_1 = \frac{1}{2}$  *lub*  $t_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $t_2 \notin \langle -1, 1 \rangle$ .

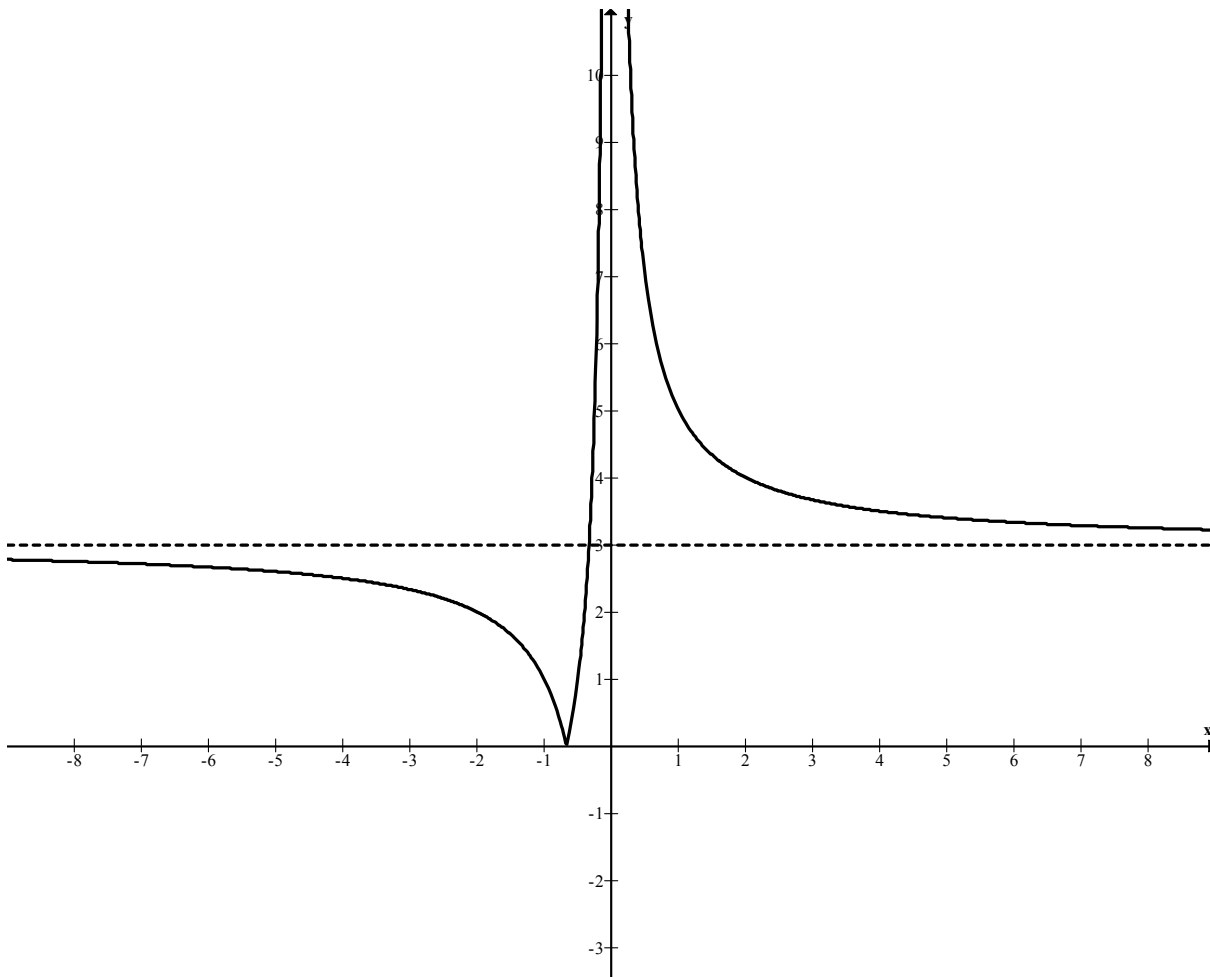
*Powracam do podstawienia i otrzymuję:*  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

*Rozwiązuję równanie  $\sin x = \frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :*  $x = \frac{\pi}{6}$  *lub*  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Zadanie 5. (5 pkt)**

Dane jest równanie  $\left| \frac{2}{x} + 3 \right| = p$  z niewiadomą  $x$ . Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru  $p$ .

Szkicuję wykres funkcji  $f(x) = \left| \frac{2}{x} + 3 \right|$  dla  $x \neq 0$ .



Z wykresu odczytuję liczbę rozwiązań równania  $\left| \frac{2}{x} + 3 \right| = p$  w zależności od

parametru  $p$ :

- dla  $p < 0$  równanie nie ma rozwiązania,
- dla  $p = 0$  lub  $p = 3$  równanie ma jedno rozwiązanie,
- dla  $0 < p < 3$  lub  $p > 3$  równanie ma dwa rozwiązania.

**Zadanie 6. (3 pkt)**

Udowodnij, że jeżeli ciąg  $(a, b, c)$  jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to  $a = b = c$ .

*Stosuję związki między sąsiednimi wyrazami ciągów arytmetycznego i geometrycznego do zbudowania układu równań:*

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a \cdot c = b^2 \end{cases}$$

*Podstawiam do drugiego równania w miejsce  $b$  wyrażenie  $\frac{a+c}{2}$  i otrzymuję*

*równanie:* 
$$ac = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

*Wykonuję równoważne przekształcenia:*

$$4ac = a^2 + 2ac + c^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$(a-c)^2 = 0, \text{ a stąd otrzymuję równość } a = c.$$

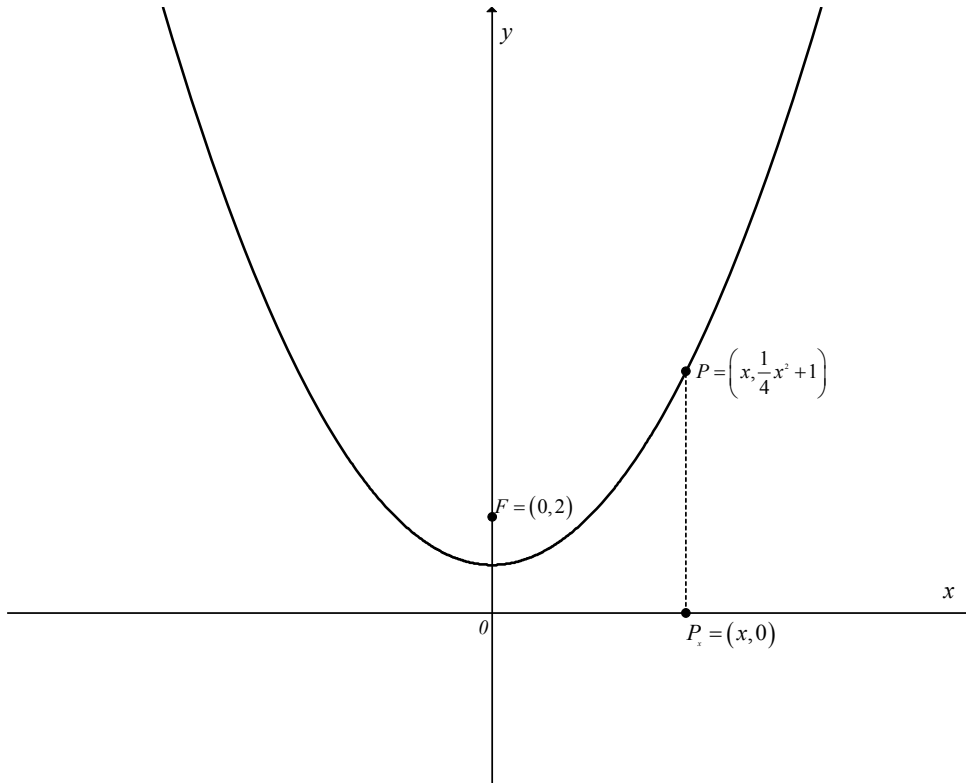
*Korzystając z równości  $a = c$  i z pierwszego równania układu otrzymuję:*

$$\frac{2 \cdot c}{2} = b, \text{ stąd otrzymuję równość } c = b.$$

*Ponieważ zachodzi  $a = c$  i  $b = c$ , więc  $a = b = c$ , co należało udowodnić.*

**Zadanie 7. (4 pkt)**

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$  jest równoodległy od osi  $Ox$  i od punktu  $F = (0, 2)$ .



Wybieram dowolny punkt  $P$  leżący na paraboli i oznaczam jego współrzędne w zależności od jednej zmiennej  $P = \left(x, \frac{1}{4}x^2 + 1\right)$ .

Punkt  $P_x = (x, 0)$  jest rzutem punktu  $P$  na oś  $Ox$ . Odległość punktu  $P$  od osi  $Ox$  jest równa  $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right|$ .

$\frac{1}{4}x^2 + 1 > 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , więc  $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$ .

Wyznaczam odległość punktu  $P$  od punktu  $F$ :

$$|PF| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2\right)^2}$$

$$|PF| = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

$$|PF| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Zatem  $|PP_x| = |PF|$ .

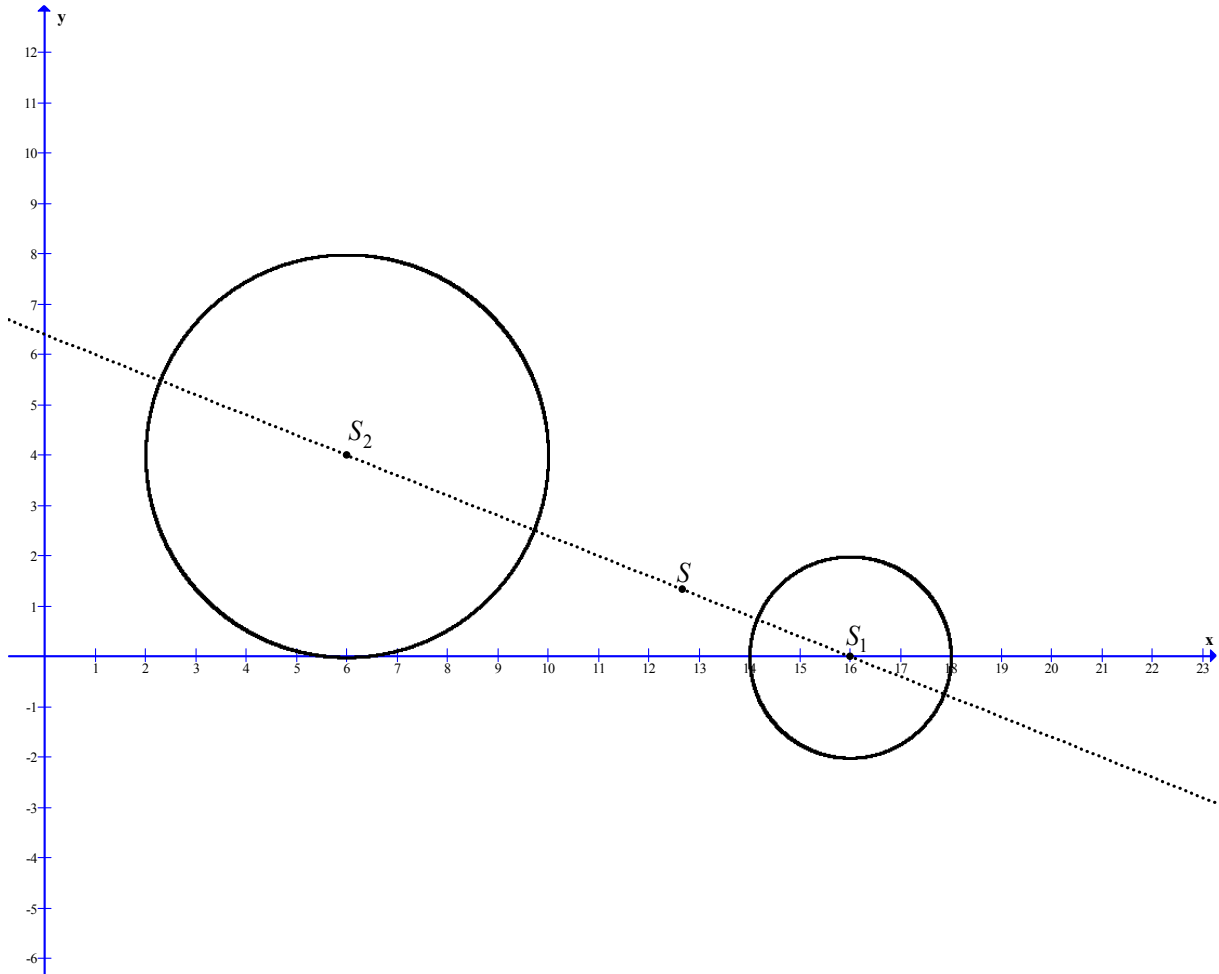


**Zadanie 8. (4 pkt)**

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu  $(x-16)^2 + y^2 = 4$  jest okrąg o równaniu  $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$ , a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Środkiem okręgu  $(x-16)^2 + y^2 = 4$  jest punkt  $S_1 = (16, 0)$ , a promień  $r_1 = 2$ .

Środkiem okręgu  $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$  jest punkt  $S_2 = (6, 4)$ , a promień  $r_2 = 4$ .



Na płaszczyźnie każde dwa okręgi są jednokładne. W tym przypadku stosunek długości promieni danych okręgów jest równy 2, więc szukam punktu  $S = (x, y)$ , który jest środkiem jednokładności o skali  $(-2)$ .

Z własności jednokładności wynika równanie:  $\overrightarrow{SS_2} = -2 \cdot \overrightarrow{SS_1}$ ,

$$\overrightarrow{SS_2} = [6 - x, 4 - y], \quad \overrightarrow{SS_1} = [16 - x, -y]$$

$$[6 - x, 4 - y] = -2 \cdot [16 - x, -y]$$

$$[6 - x, 4 - y] = [-32 + 2x, 2y]$$

Obliczam odcięta punktu  $S$ :  $6 - x = -32 + 2x$ , stąd  $x = \frac{38}{3}$ .

Obliczam rzędną punktu  $S$ :  $4 - y = 2y$ , stąd  $y = \frac{4}{3}$ .

Odp. Środkiem jednokładności jest punkt  $S = \left(\frac{38}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .

**Zadanie 9. (4 pkt)**

Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji  $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$ .

Korzystam z faktu, że funkcja logarytmiczna dla podstawy równej  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  jest malejąca. Oznacza to, że funkcja  $f$  przyjmuje najmniejszą wartość dla największego argumentu.

Wyznaczam dziedzinę funkcji  $f$ :

$$8x - x^2 > 0$$

$$x \cdot (8 - x) > 0$$

$$x \in (0, 8)$$

Wyrażenie  $8x - x^2$  osiąga największą wartość dla  $x = 4$  i jest ona równa 16.

Najmniejszą wartością funkcji  $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$  jest liczba  $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16)$ .

Obliczam wartość funkcji  $f$  dla argumentu 16, korzystając z definicji logarytmu:

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16) = y$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y = 16$$

$$\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^y = 2^4$$

$$\frac{-y}{2} = 4, \text{ więc } y = -8$$

**Odpowiedź:** Liczba  $(-8)$  jest najmniejszą wartością funkcji  $f$ .

**Zadanie 10. (4 pkt)**

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdują się tylko kobiety jest równe  $0,1$ . Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Oznaczam:  $n$  – liczba kobiet,  $2n$  – liczba mężczyzn i  $n \geq 2$ .

Zdarzeniem elementarnym jest każdy dwuelementowy podzbiór zbioru  $3n$ -elementowego.

Wyznaczam moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych  $\Omega$ :

$$|\Omega| = \binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}.$$

$A$  – zdarzenie polegające na tym, że w delegacji znajdują się tylko kobiety.

Wyznaczam liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia  $A$ :

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n-1}{3(3n-1)}.$$

Zapisuję równanie wynikające z warunków zadania :

$$\frac{n-1}{3(3n-1)} = \frac{1}{10}$$

$$10n - 10 = 9n - 3$$

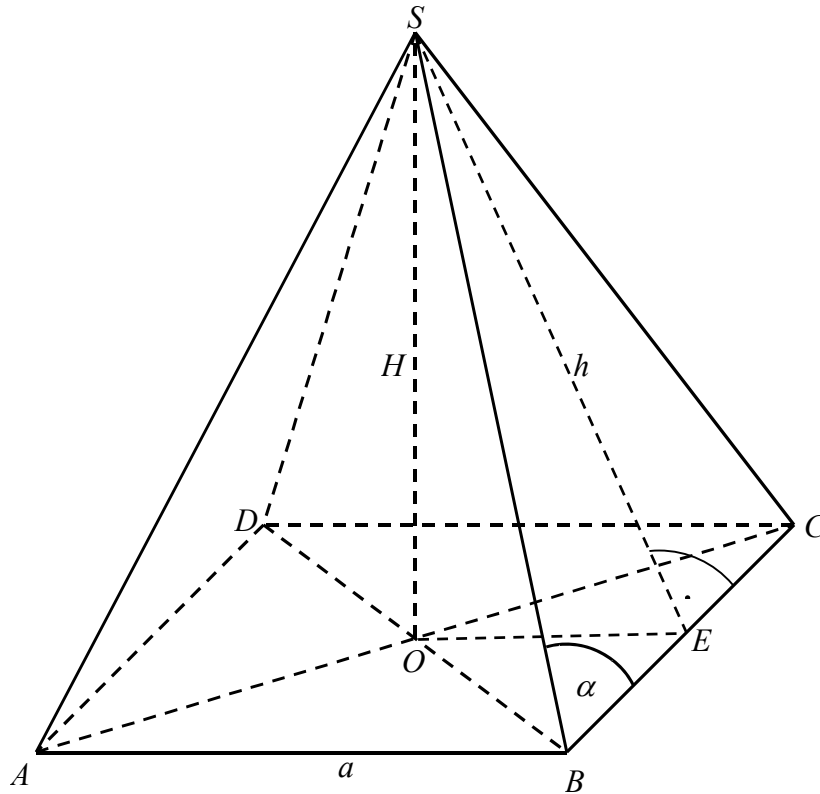
$$n = 7$$

Odpowiedź: W grupie jest 7 kobiet i 14 mężczyzn.

**Zadanie 11. (5 pkt)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są:  $H$  – wysokość ostrosłupa oraz  $\alpha$  – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ( $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

- a) Wykaż, że objętość  $V$  tego ostrosłupa jest równa  $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$ .
- b) Oblicz miarę kąta  $\alpha$ , dla której objętość  $V$  danego ostrosłupa jest równa  $\frac{2}{9} H^3$ . Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



Wprowadzam oznaczenia:

$a$  – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

$h$  – wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

- a) Z trójkąta prostokątnego  $BES$  wyznaczam  $h$ :  $\frac{h}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \alpha$ , stąd  $h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Stosuję twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym  $SOE$  i otrzymuję:

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2.$$

Podstawiam wyrażenie  $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$  w miejsce  $h$ , otrzymuję  $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)^2$ .

Wyznaczam  $a^2$ :

$$H^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad H^2 = \frac{a^2}{4} \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1), \quad a^2 = \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

Obliczam objętość ostrosłupa:

podstawiam do wzoru  $V = \frac{1}{3}a^2H$  wyznaczoną wartość  $a^2 = \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$ ;

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \cdot H = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} - \text{co należało wykazać.}$$

b) Zapisuję równanie:  $\frac{2}{9} \cdot H^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$ .

Mnożę obie jego strony przez  $\frac{9}{2 \cdot H^3}$  i otrzymuję równanie:  $1 = \frac{6}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$ .

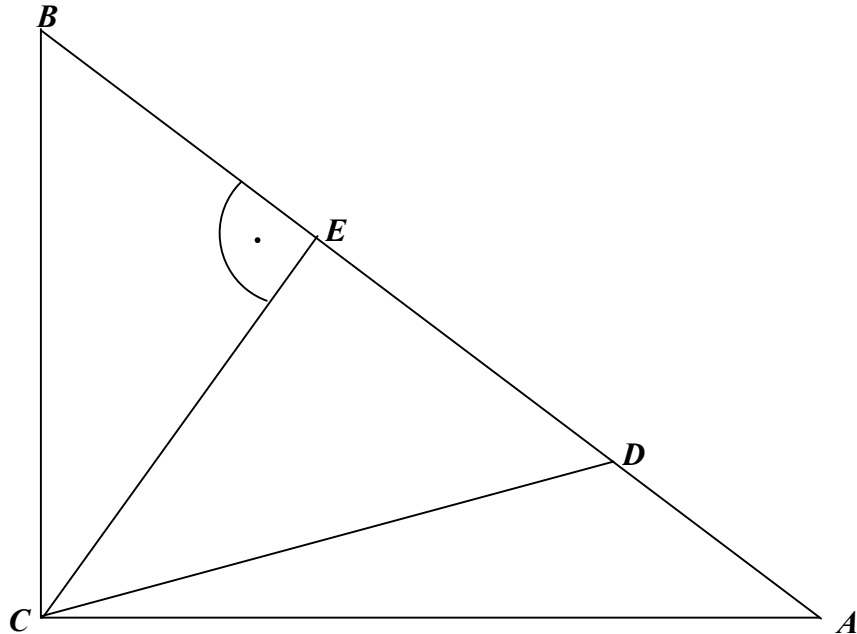
Stąd  $\operatorname{tg}^2 \alpha = 7$  czyli  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$  (odrzucaam równość  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{7}$ , bo  $\alpha$  jest kątem ostrym).

$$\sqrt{7} \approx 2,6458$$

Z tablic funkcji trygonometrycznych odczytuję szukaną miarę kąta  $\alpha$ :  $\alpha = 69^\circ$ .

**Zadanie 12. (4 pkt)**

W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przyprostokątne mają długości:  $|BC| = 9$ ,  $|CA| = 12$ . Na boku  $AB$  wybrano punkt  $D$  tak, że odcinki  $BC$  i  $CD$  mają równe długości. Oblicz długość odcinka  $AD$ .



Rysuję wysokość  $CE$  poprowadzoną z wierzchołka  $C$  trójkąta  $ABC$ . Jest ona jednocześnie wysokością trójkąta równoramiennego  $BCD$ , co oznacza, że  $|BE| = |DE|$ .

Trójkąt  $BEC$  jest podobny do trójkąta  $ABC$  (oba trójkąty są prostokątne, kąt  $EBC$  jest ich kątem wspólnym).

Z podobieństwa trójkątów wynika proporcja  $\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ .

Obliczam długość odcinka  $AB$ :  $|AB| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$  i korzystając z wyznaczonej

proporcji obliczam długość odcinka  $BE$ :  $|BE| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{27}{5}$ .

Wyznaczam długość odcinka  $AD$ :  $|AD| = 15 - 2 \cdot \frac{27}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$ .

Odpowiedź: Odcinek  $AD$  ma długość równą  $4\frac{1}{5}$ .

**BRUDNOPIS**